1 | Normalform

Bestimmen Sie die $\underbrace{\text{Hessenormalformen}}_{\text{HNF}}$ der folgenden affinen Hyperebenen.

(a) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x+4y=2\right\} =: L$ (1,5 Punkte)

(b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y+z=5\right\} =: E_1$ (1,5 Punkte)

(c) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x+iy+(2+3i)z=7\right\} =: E_2$ (2 Punkte)

a: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \right\}$ ½

$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, ½ also ist $\left\| \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\| = 1$ und

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{5} \right\}$ ist die HNF von L ½

b: $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \right\}$ ½

$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$, ½ also ist $\left\| \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$

und

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{\sqrt{14}} \right\}$ ist die HNF von E_1 ½

c:

Koeffizienten müssen komplex konjugiert werden!

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \right\rangle = 7 \right\}$ ½

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 \cdot 1 + (-i) \cdot i + (2-3i)(2+3i)} = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{15}$ 1

Also ist $\left\| \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \right\| = 1$ und

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{\sqrt{15}} \right\}$ ½

ist die HNF von E_2.

2 | Gram und Schmidt

Zeigen Sie, dass die folgende 4×4-Matrix ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ definiert. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Um zu zeigen, dass die durch die Matrix definierte Bilinearform positiv definit ist, können Sie das Kriterium aus Aufgabe 4 verwenden.)

Da Matrix symmetrisch, definiert sie symmetrische Bilinearform B. ½

Diese ist positiv definit nach Kriterium aus Aufgabe 4:

$$\det(1) = 1 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 - 1 - 3 = 2 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vorheriges Blatt

$$= 1 \cdot 3$$

$$= 3 > 0$$

1

⚠ Es reicht **nicht** zu zeigen
$\mathcal{B}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) > 0$ für Basisvektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$.

z.B. $$\mathcal{B}_{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{B}_{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 > 0,$$

aber $$\mathcal{B}_{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Gram-Schmidt: (siehe Beweis zu Satz 10.21)

$$\underline{d}_1 := \frac{\underline{e}_1}{\sqrt{\mathcal{B}(\underline{e}_1, \underline{e}_1)}} = \frac{\underline{e}_1}{\sqrt{1}} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{c}_2 &:= \underline{e}_2 - \mathcal{B}(\underline{e}_2, \underline{d}_1) \cdot \underline{d}_1 \\ &= \underline{e}_2 - \mathcal{B}(\underline{e}_2, \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 \\ &= \underline{e}_2 - \underline{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\underline{c}_2, \underline{c}_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\underline{d}_2 := \frac{\underline{c}_2}{\sqrt{\mathcal{B}(\underline{c}_2, \underline{c}_2)}} = \underline{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{c}_3 &:= \underline{e}_3 - \mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{d}_1) \cdot \underline{d}_1 - \mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{d}_2) \cdot \underline{d}_2 \\ &= \underline{e}_3 - \underbrace{\mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{e}_1)}_{0} \cdot \underline{e}_1 - \mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{e}_2 - \underline{e}_1) \cdot (\underline{e}_2 - \underline{e}_1) \\ &= \underline{e}_3 - \left(\underbrace{\mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{e}_2)}_{1} - \underbrace{\mathcal{B}(\underline{e}_3, \underline{e}_1)}_{0}\right)(\underline{e}_2 - \underline{e}_1) \\ &= \underline{e}_3 - \underline{e}_2 + \underline{e}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(\underline{c}_3, \underline{c}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2, \text{ also}$$

$$d_3 := \frac{c_3}{\sqrt{\beta(c_3, c_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 := e_4 - \beta(e_4, d_1) \cdot d_1 - \beta(e_4, d_2) \cdot d_2 - \beta(e_4, d_3) \cdot d_3$$

$$= e_4 - \beta(e_4, e_1) \cdot e_1 - \beta(e_4, e_2 - e_1) \cdot (e_2 - e_1)$$

$$- \frac{1}{2} \beta(e_4, e_1 - e_2 + e_3)(e_1 - e_2 + e_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \beta(e_4, e_1) &= 1 \\ \beta(e_4, e_2) &= 0 \\ \beta(e_4, e_3) &= -2 \end{aligned}}$$

$$= e_4 - 1 \cdot e_1 + 1 \cdot (e_2 - e_1) - \frac{1}{2}(1 - 2) \cdot (e_1 - e_2 + e_3)$$

$$= e_4 - e_1 + e_2 - e_1 + \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$$

$$= -\frac{3}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 + e_4$$

$$= -\frac{3}{2} e_1 + \frac{5}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 + e_4$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta(c_4, c_4) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ also}$$

$$d_4 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot c_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ ist ON-Basis von $(\mathbb{R}^3, \beta)$.

Bewertung: 2 für „prinzipiell" richtige Anwendung des Algorithmus (nur 1 falls Normalisierung fehlt)

1,5 für richtige Ergebnisse; −0,5 pro Rechenfehler

3 | Naturprodukt

Das Kreuzprodukt ist bekanntlich eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Vielleicht war sie Ihnen bislang sympathischer als manch andere Verknüpfung aus der Vorlesung. Das könnte sich jetzt ändern.

(a) Ist das Kreuzprodukt assoziativ?

(b) Ist das Kreuzprodukt kommutativ?

(c) Gibt es für das Kreuzprodukt ein neutrales Element? *Tipp: Schauen Sie sich zunächst die nachfolgenden Aufgabenteile an, wenn Sie hier nicht weiterkommen.*

(d) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt distributiv ist: für beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$

(e) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(e)

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \text{"}\det\begin{pmatrix}e_1 & a & a\\ e_2 & b & b\\ e_3 & c & c\end{pmatrix}\text{"}$$

$$= \begin{pmatrix}bc - bc\\ -(ac - ac)\\ ab - ab\end{pmatrix}$$

$$= \underline{0}$$

1/2

(a) Nein, z.B.

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{(e)}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1

(b) Nein, z.B.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

1

(c) Nein: (1)

Für ein neutrales Element $\underline{e}$ müsste insbesondere gelten: (1) $\underline{e} \times \underline{e} = \underline{e}$

(2) $\underline{e} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen (1) würde nach Aufgabenteil (c) folgen:

$$\underline{e} = \underline{0}.$$

Dann wäre aber $\underline{e} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$, im Widerspruch zu (2).

(d) Nachrechnen! (3/2)

....

....

....

4 | Hauptminorenkriterium

In dieser Aufgabe werden Sie insbesondere die (für Aufgabe 2 nützliche) Implikation ($\Leftarrow$) des folgenden Kriteriums beweisen.

> Die durch eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix definierte Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren der Matrix positiv sind.

Ein **Minor** einer $n \times n$-Matrix M ist die Determinante einer kleineren quadratischen Matrix, die aus M durch das Entfernen gewisser Spalten und Zeilen hervorgeht. Der k-te **führende Hauptminor** ist die Determinante der $k \times k$-Untermatrix von M, die aus M hervorgeht, indem wir alle Zeilen und Spalten außer den linkesten k Spalten und obersten k Zeilen entfernen.

(a) Beweisen Sei eine allgemeine Variante des Kriteriums für Diagonalmatrizen: Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V. Sei $B := (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine Basis von V derart, dass die darstellende Matrix $M_B(\beta)$ eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie, dass β genau dann positiv definit ist, wenn alle Einträge von $M_B(\beta)$ positiv sind.

Nach Annahme $M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

($\Rightarrow$) Falls β positiv definit, ist insbesondere

$a_i = \beta(\underline{b}_i, \underline{b}_i) > 0$ (denn $\underline{b}_i \neq \underline{0}$ da $\underline{b}_i$ Teil einer Basis)

für alle i.

($\Leftarrow$) Seien alle $a_i > 0$. Für einen beliebigen Vektor $\underline{v} = \sum v_i \underline{b}_i \neq 0$ in V gilt dann:

$$\beta(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j} v_i v_j \beta(\underline{b}_i, \underline{b}_j) = \sum_i v_i^2 \beta(\underline{b}_i, \underline{b}_i) = \sum a_i \cdot v_i^2 > 0,$$

und

$a_i > 0$ nach Annahme

$v_i^2 \geq 0$, und mindestens ein $v_i \neq 0$ da $\underline{v} \neq \underline{0}$.

$\square$

1

(b) Sei nun M eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, deren führende Hauptminoren positiv sind. Beweisen Sie durch Induktion über n, dass die assozierte Bilinearform $\beta := \beta_M$ auf $\mathbb{R}^n$ positiv definit ist.

IA: $n=1$ $M=(a)$. Nach Annahme $a>0$.

Für $v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt also $\beta(v,v) = a \cdot v^2 > 0$.

IV: Aussage gilt für $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen.

1/2

IS: Gehen Sie dabei im Induktionsschritt wie folgt vor:

1. Nutzen Sie die Induktionsvoraussetzung, um zu zeigen, dass die Einschränkung von β auf $\mathbb{R}^{n-1} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$ positiv definit ist.

$\beta|_{\mathbb{R}^{n-1}} = \beta_{M'}$ für $M' := M_{\#n,n}$

Zeile n und Spalte n gestrichen

Die führenden Hauptminoren von M' sind die ersten $n-1$ führenden Hauptminoren von M. Daher ist $\beta|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ nach IV positiv definit (also ein Skalarprodukt).

1/2

2. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^n$ eine Basis $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt: $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1})$ ist eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^{n-1}, \beta|_{\mathbb{R}^{n-1}})$, $\mathbf{e}_n$ ist der n-te Standardbasisvektor.

Zu jedem Skalarprodukt existiert eine ON-Basis. Sei also $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{n-1})$ ON-Basis für $\beta|_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Dann ist

$(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{n-1}, \underline{e}_n)$ Basis für $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \langle \underline{e}_n \rangle$

1/2

3. Folgern Sie, dass $M_B(\beta)$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & d \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $d \in \mathbb{R}$

Per Konstruktion ist $\beta(\underline{b}_i, \underline{b}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ für $i = 1, \ldots, n-1$

Wähle $c_i := \beta(\underline{b}_i, \underline{e}_n) = \beta(\underline{e}_n, \underline{b}_i)$,

$d := \beta(\underline{e}_n, \underline{e}_n)$.

1/2

4. Zeigen Sie außerdem, dass $M_B(\beta)$ eine positive Determinante hat.

$M = M(\beta)$ und $M_B(\beta)$ sind kongruent, denn sie stellen dieselbe Bilinearform dar. Es gibt also $S \in GL_n(\mathbb{R})$ mit

$$M_B(\beta) = S^T \cdot M \cdot S.$$

Also ist $\det(M_B(\beta)) = \underbrace{\det(S)^2}_{>0 \text{ da } S \text{ invertierbar}} \cdot \underbrace{\det(M)}_{>0 \text{ nach Annahme}} > 0$

1/2

5. Zeigen Sie, dass auch $B' := (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{b}_i)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Option A:

$(b_1, \ldots, b_{n-1})$ ist linear unabhängig, und $e_n - \sum c_i b_i \notin \mathbb{R}^{n-1} = \langle b_1, \ldots, b_{n-1} \rangle$ (denn $\sum c_i b_i \in \mathbb{R}^n$ aber $e_n \notin \mathbb{R}^{n-1}$).

Also ist B' linear unabhängig nach Ergänzungslemma 5.5. Da $|B'| = \dim \mathbb{R}^n$ folgt, dass B' eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Option B:

Sei j die lineare Abbildung, die die Standardbasisvektoren E von $\mathbb{R}^n$ auf die Vektoren von B' abbildet.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n$$
$$e_i \longmapsto i\text{-ter Vektor von } B'$$

Die darstellende Matrix ${}_E M_B(j)$ lässt sich aus der gegebenen Darstellung von B' ablesen:

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \underbrace{\mathbf{e}_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{b}_i})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -c_1 \\ & 1 & & -c_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -c_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = {}_B M_E(j)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "{}_B M_E(j)"] \arrow[d, equal] & & \mathbb{R}^n \arrow[d, "B"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "j"] & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$e_i \longmapsto$ i-tes Vektor von B'

Offenbar $\det({}_B M_E(j)) = 1$. Insbesondere ${}_B M_E(j)$ invertierbar, somit j Isomorphismus und somit B' eine Basis. 1/2

6. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{B'}(\beta)$.

$$\beta\Big(\underline{b}_j, \underline{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i\Big) = \beta(\underline{b}_j, \underline{e}_n) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underbrace{\beta(\underline{b}_j, \underline{b}_i)}_{\substack{0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j}}$$

$$= \beta(\underline{b}_j, \underline{e}_n) - c_j$$

$$= 0 \quad \text{nach Def. von } c_j$$

für $j = 1, \ldots, n-1$

$$\beta\Big(\underline{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i, \underline{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i\Big)$$

$$= \beta(\underline{e}_n, \underline{e}_n) - 2\beta\Big(\underline{e}_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i\Big) + \beta\Big(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i, \sum_{i=1}^{n-1} c_i \underline{b}_i\Big)$$

$$= d - 2\sum_{i=1}^{n-1} c_i \beta(\underline{e}_n, \underline{b}_i) + \sum_{i,j=1}^{n-1} c_i c_j \beta(\underline{b}_i, \underline{b}_j)$$

$$= d - 2\sum_{i=1}^{n-1} c_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2$$

$$= d - \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2$$

Demnach:

$$M_{B'}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & d - \sum c_i^2 \end{pmatrix}$$

1/2

7. Folgern Sie endlich, dass β positiv definit ist.

$M_{B'}(\beta)$ ist eine Diagonalmatrix.
Mit demselben Argument wie in 4. folgt außerdem $\det(M_{B'}(\beta)) > 0$. Also ist $d - \sum c_i^2 > 0$.
Wir können daher aus Teil (a) folgern, dass β positiv definit ist.

1/2